平成29年度 入学試験問題

10

数　　　学

（前期日程）

「解答はじめ」の合図があるまでは問題冊子を開いてはいけません。

注 意 事 項

1. 問題冊子は１ページから５ページまでの綴りでできています。「解答はじめ」の合図の後，ページの落丁，乱丁あるいは印刷の不鮮明なものがあれば，手をあげて試験監督者に申し出てください。
2. 問題は４問あり，それぞれに解答用紙が１枚 (表裏計２ページ) ずつ，合計４枚 (8ページ) あります。４枚の解答用紙のすべての表に受験番号を必ず記入してください。解答用紙の裏には受験番号を記入する必要はありません。
3. 解答は該当する解答用紙に記入してください。解答用紙の表と裏では上下が逆になっています。記入の際には注意してください。
4. 問題冊子の空白のページや余白は，下書き用紙として使用してください。
5. 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

$\boxed{1}$

関数 $f(x) = x(x^2+1)e^{-x^2}$ について，次に答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(i) 関数 $g(t) = t^2 e^{-t}$ の増減を調べ，$t > 1$ のとき $g(t) < 1$ であることを示せ。

(ii) $k = 0$，1，2，3 に対して，$x > 1$ のとき $x^k e^{-x^2} < \dfrac{1}{x^{4-k}}$ が成立することを示し，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x^2} = 0$ を示せ。

(iii) 関数 $y = f(x)$ について，増減および漸近線に注意して，そのグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい。

(iv) $s \geqq 0$ に対して，定積分 $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(x)dx$ を計算し，$\displaystyle\lim_{s\to\infty} F(s)$ を求めよ。

$\boxed{2}$

座標平面上で，曲線

$$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 + \cos\theta \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

を C とする。次に答えよ。

(i) 曲線 C 上の点 $(\theta - \sin\theta,\ 1 + \cos\theta)$ における接線の方程式を求めよ。

(ii) 曲線 C は下に凸であることを示せ。

(iii) $0 < \theta < \pi$ のとき，点 $\mathrm{P}(\theta - \sin\theta,\ 1 + \cos\theta)$ における曲線 C の接線と，
点 $\mathrm{Q}(\theta + \pi - \sin(\theta + \pi),\ 1 + \cos(\theta + \pi))$ における曲線 C の接線が，
垂直に交わることを示せ。

(iv) (iii) の 2 点を結んだ線分 PQ の長さの最大値とそのときの θ の値を求めよ。

(v) (iv) で求めた θ に対応する点 P，Q の x 座標を，それぞれ α，β とする。
曲線 C と x 軸，および 2 直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

a を実数とする。関数 $f(x)$，　$g(x)$ が

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x + \left(\int_0^a g(t)dt\right)\sin x \\ g(x) &= e^{-x}\left(-x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt\right) \end{aligned}$$

をみたすとき，次に答えよ。

(i)　$A = \displaystyle\int_0^a g(t)dt$，$B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ とおくとき，B を A を用いて表せ。

(ii)　$f(x)$，$g(x)$ を a を用いて表せ。

(iii)　$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x) = 0$ となるときの $\cos x$ の値を a を用いて表せ。

(iv)　$-2 \leqq a \leqq 0$ において，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|dx$ を最小にする a の値を求めよ。

$\boxed{4}$

数 1 と数 2 の並びを考える。たとえば，1，2，1 の順の並びを (1，2，1) で表す。和が自然数 n となるような数 1 と数 2 の並びの集合を S_n と表し，S_n の要素の個数を a_n とする。たとえば，$n=3$ のとき，$3=2+1=1+2=1+1+1$ となるので，$S_3=\{(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 1)\}$，$a_3=3$ となる。次に答えよ。

(i) a_4 および a_5 を求めよ。

(ii) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n で表せ。

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+2}-2$ となることを示せ。

(iv) S_{n+3} から並びを一つ選ぶとき，その並びの 1 番目の数が 1 となる確率を a_{n+1} と a_{n+2} を用いて表せ。

(v) S_{n+3} から並びを一つ選ぶとき，その並びの 2 番目の数が 2 となる確率を a_{n+1} と a_{n+2} を用いて表せ。

(vi) S_{n+4} から並びを一つ選ぶ。選んだ並びの 2 番目の数が 2 であるとき，その並びの 1 番目の数が 1 である確率を a_{n+1} と a_{n+2} を用いて表せ。